Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Казанский государственный архитектурно-строительный университет»
(ФГБОУ ВО «КГАСУ»)

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по НИР
_______________ Е.А. Вдовин
«27» ____09____ 2018 г.

ПРОГРАММА-МИНИМУМ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

Направление подготовки
01.06.01 МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
код и наименование направления подготовки

Направленность (профиль)
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»
код и наименование направления подготовки

Уровень высшего образования
подготовка кадров высшей квалификации

Квалификация выпускника:
«Исследователь. Преподаватель-исследователь»

Форма обучения
очная, заочная

Год набора 2014

Кафедра
«Высшая математика»

г. Казань – 2018 г.

Программа-минимум кандидатского экзамена по специальности разработана в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре и устанавливает требования к знаниям и умениям по специальности 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» обучающихся по программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре (далее – аспиранты) и лиц, прикрепленных для прохождения промежуточной аттестации и сдачи кандидатских экзаменов без освоения программ подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре (далее – прикрепленные в качестве экстернов).

Разработал:
Профессор кафедры
«Высшая математика»
д-р физ.-мат. наук, доцент Шабалин П.Л

Рассмотрена и одобрена на заседании
кафедры *«Высшая математика»*
«25» 09 2018г.
Протокол № 1
Заведующий кафедрой
/ / Туктамышов Н.К. /

СОГЛАСОВАНО:

Председатель методической комиссии
Института Транспортных сооружений
«25» 09 2018г.
Протокол № 30
/ / Смирнов Д.С./

Руководитель ОПОП
/ / Шабалин П.Л. /

1. ПРОГРАММА-МИНИМУМ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

1. Меры, измеримые функции, интеграл.

Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини. ([2], гл. V; [5], гл. III-VI, XI, XII; [Д1], гл. 1-4)

2. Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования.

Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением (вариацией). Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона–Никодима. Интеграл Стилтьеса. ([2], гл. VI; [5], гл. VIII, IX, XIII, XVII; [Д1], гл. 5)

3. Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды.

Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства **L**p , их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в **L**2 и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы. ([2], гл. VII; [5], гл. VII)

4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье

Условие сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярнымы интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье–Стилтьеса. ([2], гл. VIII, §§ 1-7; [5], гл. X; [6], гл. 15,16).

5. Гладкие многообразия и дифференциальные формы.

Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа. ([6],гл. 17; [9], гл. 9)

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

6. Интегральные представления аналитических функций.

Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого. ([7], гл. IV; [4], гл. III, §§ 1–3; [3], гл. I, § 4, гл. III, § 3)

7. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты.

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Приближение аналитических функций многочленами. ([7], гл. V–VII; [4], гл. III, §§ 4–7, гл. IV, гл. V, § 4; [3], гл. I, §5, гл. V, §2)

8. Целые и мероморфные функции.

Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг–Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями. ([7], гл. IX, §1,2; [4], гл. VII, §§ 1–3; [3], гл. V, §1).

9. Конформные отображения.

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях. ([7], гл. III, § 1,3, гл. XII, §§ 1,2,6,7; [4], гл. V, §§1–3; [3], гл. II)

10. Аналитическое продолжение.

Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие Римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления бесконечного порядка. Принцип симметрии. Формула Кристоффеля–Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства функций, критерий нормальности. Теорема Пикара. ([7], гл. X, гл. XII, §8; [4], гл. VIII; [3], гл. II, §3)

11. Гармонические функции.

Гармонические функции, их связь с аналитическими. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцируемость. Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга. ([3], стр. 199-235, [11], стр. 259–267).

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

12. Метрические и топологические пространства.

Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах. ([2], гл. II; [10], гл. IV).

13. Нормированные и топологические линейные пространства.

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Банаха–Хана. Отделимость выпуклых множеств. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах C и Lp. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства. ([2], гл. III; [10], гл. IV).

14. Линейные функционалы и линейные операторы.

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов. Спектр и резольвента. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма. ([2], гл. IV, §§1–3,5,6; [10], гл. IV; [Д4], гл. VI, §1,2).

15. Гильбертовы пространства и линейные операторы в них.

Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы. ([8], гл. VI–VIII; [10], гл. V).

16. Дифференциальное исчисление в линейных пространствах.

Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона. ([2], гл. X).

17. Обобщенные функции.

Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем. ([1], гл. II; [2], гл. IV, §4, гл. VIII, §8; [Д5], гл. 6, стр. 177–180).

2. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

Таблица 2.1.

Список основной литературы

№ п/п	**Наименование**	**Кол-во экз.**
1	Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. V. М., Физматгиз, 1959.	2
2	Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М. Наука, 1966.	2
3	Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, т. 1-2. М., Наука, 1967.	2
4	Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Наука, 1974.	2
5	Никольский С.М. Курс математического анализа, т. II. М., Наука, 1975 (1991).	1
6	Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., Наука, 1976 (2008).	1
7	Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 1. Функциональный анализ. М., Мир, 1976.	1
8	Рудин У. Основы математического анализа. М., Мир, 1976.	3
9	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М., Наука, 1977 (1999).	2
10	Лаврентьев И.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного// Лань. 2002. – 749 с.	3
11	Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа// М.: ФИЗМАТЛИТ. 2004. – 575 с.	3
12	Волковысский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного// Москва: Физматлит. – 2006. – 312с.	2

Таблица 2.2.

Список дополнительной литературы

№ п/п	**Наименование**	**Кол-во экз.**
1	Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965	1
2	Рудин У. Функциональный анализ. М., Мир, 1975.	1
3	Зорич В.А. Математический анализ, т. II. М., Наука, 1984.	1
4	Евграфов М.А. Аналитические функции. М., Наука, 1991.	2
5	Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М., Факториал, 1998.	1
6	Тихонов А.Н., Самарский А.А. М. Уравнения математической физики// Издательство МГУ. 2004. -- 799 с.	3

3. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

Оценка результатов проводится по 4-х балльной шкале оценивания путем выборочного контроля во время экзамена.

Таблица 3.1.

Критерии оценки

Оценка	**Критерии**
«отлично»	Даны полные и правильные ответы на все вопросы. Аспирант четко и ясно излагает свои мысли, приводит примеры и отвечает на все дополнительные вопросы.
«хорошо»	Даны полные ответы на все вопросы. Аспирант четко и ясно излагает свои мысли, приводит примеры и отвечает также на большинство дополнительные вопросы.
«удовлетворительно»	Даны полные ответы не на все вопросы. Аспирант правильно излагает свои мысли и отвечает также на большинство дополнительные вопросы.
«неудовлетворительно»	Не дано ответов на большинство вопросов, имеются грубые ошибки или даны неполные ответы. Аспирант не четко выражает свои мысли, не приводит примеров.